数理解析研究所講究録
863巻 1994年 143-161

Fuchs群に付随した一次元Markov写像とゼータ関数

阪大理 盛田健彦(Takehiko Morita)

1. Γを第一種有限生成Fuchs群とする。すなわち、Γは $PSL(2,\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix};\ a,b,c,d\in\mathbb{R},\ \underset{=1}{ad-bc}\right\}/\{-I,I\}$ の離散部分群で上半平面 $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C};\ \mathrm{Im}\,z>0\}$ をこのactionで割った商空間が(Mと書こう)Poincaré計量に関して面積有限なRiemann面となるものとする。但し、ここでいうRiemann面は分岐点の存在を許容したものとする。

上で述べた $PSL(2,\mathbb{R})$ の $\mathbb{H}$ への作用というのは良く知られているように $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}: z\longmapsto\dfrac{az+b}{cz+d}$ と一次変換群としてのものであり、それは $\mathbb{H}$ 上の双曲計量=Poincaré計量についての等長群としての作用であることはいうまでもない。

さて、次のような二つの形式的なEular積であらわされる'関数'を考える。

$$Z(s) = \prod_{k=0}^{\infty} \prod_{c \in CH(\Gamma)} \left[1 - \exp[-(s+k)\ell(c)]\right]$$

$$\zeta(s) = \prod_{c \in CH(\Gamma)} \left(1 - \exp[-s\ell(c)]\right)^{-1}$$

$Z(s)$はいわゆるSelberg zeta関数といわれているものであり、ζはL-関数の類である. $\prod_{c \in CH(\Gamma)}$はΓの原始的双曲元の共役類すべてにわたってとった積をあらわす. 念のためにPSL(2,$\mathbb{R}$)の双曲元とは$g \in PSL(2,\mathbb{R})$をとって $g h g^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 1$ とかける. i.e. $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$に相異なる二つの固定点をもつものである. 双曲元$h \in \Gamma$が原始的であるとは$h = h_0^n$ for some $h_0 \in \Gamma \Rightarrow n = \pm 1$ということとする. $\ell(c)$は

$$\ell(c) = 2\cosh^{-1}\left(\frac{\mathrm{tr}\, h}{2}\right) \text{ where } h \in c$$

と具体的に書けた量で定義式から共役類cのみによる.

さて、次にZ, ζの意味を少し考えると$h \in c$は$\hat{\mathbb{R}}$の二点を固定し従ってそれらを結ぶ唯一の測地線（= $\mathbb{H}$での半円）をも固定する. これをMに射影したものは明らかに閉測地線となるがそのMにおける長さが$\ell(c)$であることは容易に

分るであろう。更に，hとh^{-1}で固定点が湧き出しになっているか吸収的になっているかが逆になることに注意すればMの接空間でながめればM上の閉測地線と共役類$c \in CH(\Gamma)$とは一対一対応していることが分る。ζの式において$\exp(-sl(c))$をp^{-s}，cをpとおきかえればRiemann zetaのEuler積表示が出てくるからζ，ZはRiemann面Mのlength spectrumの分布の情報をもった関数であることがRiemann zetaとの類似より明白であろう。

2. 有限生成第一種Fuchs群についてはBowenとSeries (Publ. IHES 50 (1980))による興味深い結果がある。但し，彼らは上半平面モデルではなくPoincaré discモデルを使っているのでユークリッド計量でいろいろな事を考えると異質に見えるが，双曲幾何では等長(等角はいうまでもない)同値でありPSL(2, $\mathbb{R}$)を$PSU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1 \right\} / \{-I, I\}$におきかえれば全く話はかわらない。しかし，なぜこのような良く知られた事をここでわざわざ説明するかというと，ここで書く事実の証明はこのdiscモデルでやった

方が簡単であるからである. その理由は手法がユークリッド計量を用いるから, いやむしろ微分などを双曲計量にアタッチしたように使わないからである.

Bowen & Series がやった事は以下のようなことである. ここしばらく Γ は $PSU(1,1)$ の subgroup であり Poincaré disc $D=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$ に作用しているものとしよう. Γ の作用は自然に D の境界 S^1 へ拡張されているがこの作用はたった一つの S^1 上の写像の iteration と軌道同値なのである.

すなわち

<u>命題</u>: $\exists\ T : S^1 \longrightarrow S^1$ s.t.

「 $y = gx$ for some $g\in\Gamma$

$\underset{\text{iff.}}{\Longleftrightarrow}$ $T^n x = T^m y$ for some $m, n \geq 0$ 」

しかも, この T が極めて著しい力学的性質 i.e. Markov 性をもっていること, 必要があれば非常に良い S^1 の部分集合への first return map をとることによって ($\sqcup$ とかこう). 一様拡大条件, Rényi 条件, 位相的推移性, 有限(値域)性 などを有することである. これによって我々は適当な関数空間 $\mathcal{A}$ に作用する作用素の族 $L(s)$ $s\in\mathbb{C}$ を

$$“\ L(s)g(z) = \sum_{Uy=z} U'(y)^{-s} g(y)\ ”$$

といった型の転送作用素の実現として定義できるのである。ここで報告することは

$$“\ \mathrm{Det} = \mathrm{Zet}\ ”$$

という式が右辺をSelberg zeta関数 $Z(s)$ として左辺を $\mathcal{A}$ 上に実現された転送作用素のFredholm行列式×（有限個の $c \in CH(\Gamma)$ に関する因子）の形によって成立させることができること、更にDetの方の解析的性質を調べることによって既に知られているが、Selberg trace formulaを経由するために難解なことであった事実を多少はみちびけること、である。

<u>定理</u>（c.f. D. Hejhal Springer Lecture Note 1001）

(1) $\mathrm{Re}\, s > 1$ において Z, ζ は収束して零点をもたない解析関数を与える。

(2) ζ は $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$ で零点をもたない有理型関数に拡張される。

(3) ζ の $\mathrm{Re}\, s = 1$ 上の極は $s = 1$ のみであり、

それは一位である.

(4) Z (従って ζ) は全平面に有理型に拡張 i.e. 解析接続される. 更に, Z の特異点の候補者は $s=\frac{1-k}{2}$, $k=0,1,2,\ldots$ である.

以下では上述の事実を一般の Γ について証明するには紙面が十分ではないと思われるので Γ を $PSL(2,\mathbb{Z})$ として, D. Mayer の結果と対比しつつ一般にはどういう過程で証明がすすめられるかを説明してみる.

ここで, 注意しておきたいのは先にも述べたように Bowen と Series は $PSU(1,1)$ で disc モデルを扱。なので, $PSL(2,\mathbb{Z})$ は等角変換で D の話にうつしても, Z, ζ は何らかわりはしないのだが, 技術的に Bowen-Series 流の方法にとっては例外的な場合 (i.e. q.c. deformation を必要とする) なのである. 理由は, 我々の議論が flat な S^1 でおこなわれるところにある.

3. D. Mayer は Commu. Phys. Math. 130 (1990) 311-333 及び Bull. A.M.S 25 (1991) 55-60 において $PSL(2,\mathbb{Z})$ の場合に先述の定理を連分数変換 $T_G:[0,1]\to[0,1]$

$$T_G x = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$$

を用いることで

$$Z(s) = \det(I - L_{T_G}(s)) \det(I + L_{T_G}(s))$$

という式の成立を示し、右辺の解析接続をおこなうという方法で証明している．ここで $L_{T_G}(s)$ は $[0,1]$ を含むある開円板上の有界正則関数のなすBanach空間 $\mathcal{A}$ 上で定義された転送作用素

$$L_{T_G}(s) f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n}\right)^{2s} f\left(\frac{1}{z+n}\right)$$

をあらわす（勿論，収束は $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$ でしかいえないが作用素値関数として有理型に解析接続できる）．

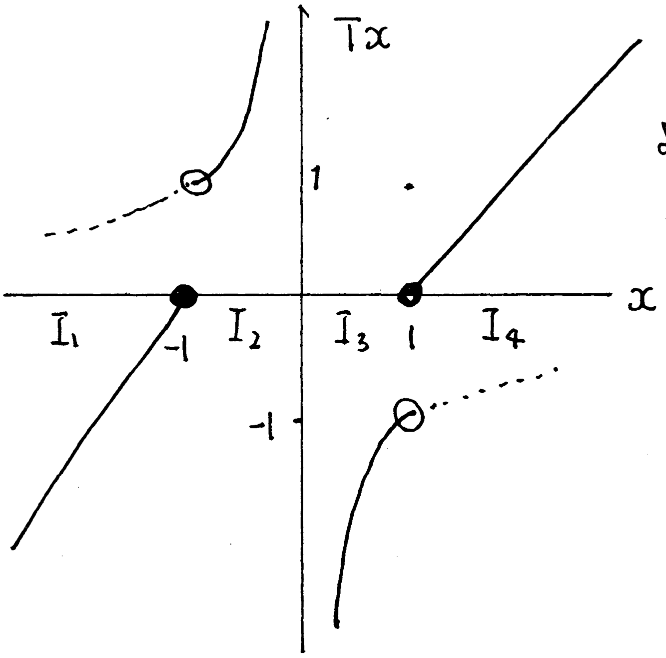
これと我々の方法を対比しながら話をすすめよう．

<u>第一段階</u>（Γ に付随したMarkov写像の構成）

Mayerは最初から連分数変換 $T_G : x \mapsto \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ を用いたが，これは $PSL(2,\mathbb{Z})$ の $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 上の作用と軌道同値ではない．我々は次の $T : \widehat{\mathbb{R}} \to \widehat{\mathbb{R}}$ から出発する．以後 $\Gamma = PSL(2,\mathbb{Z})$ とする．

$$Tx = \begin{cases} x+1 & \text{if } x \in I_1 \\ -\frac{1}{x} & \text{if } x \in I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{if} \quad x \in I_3 \\ x-1 & \text{if} \quad x \in I_4 \end{cases}$$



Tのグラフは左図のようになる.

但し

$I_1 = [\infty \ -1]$

$I_2 = (-1, 0]$

$I_3 = (0, 1)$

$I_4 = [1, \infty)$

直ちに分るTの性質として

(T, Γ) $\quad T|_{I_i} = g|_{I_i}$ for $g \in \Gamma$ (特に生成元)

(T. Tr) (transitive) $\quad I_j \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n I_i$ for any i, j.

(T. Mar) (Markovian) $\quad (T \operatorname{int} I_i) \cap \operatorname{int} I_j \neq \phi$

$$\Rightarrow \quad T \operatorname{int} I_i \supset \operatorname{int} I_j$$

そして最も重要なのは

(T. O) (orbit equivalence) $\quad x, y \in \hat{\mathbb{R}}$ に対して

$$y = gx \text{ for some } g \in \Gamma \underset{\text{iff.}}{\Longleftrightarrow} T^n x = T^m y \text{ for some } n, m \geq 0$$

この場合 (T, O) を証明するのは極めて容易である.

一般の場合は Bowen & Series に従って

$PSL(2,\mathbb{R})$ ではなく $PSU(1,1)$ の離散部分群で話をすすめる。このとき q.c. 変形によって Γ が特殊な基本領域を持つものに話を帰着するところが重要である。

第二段階（T-展開）

これは連分数変換でいうと、無理数の連分数表示に対応する。つまり、$T_G x = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ について $J_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ としたとき $T_G^k x \in J_{a_k}$ $k = 0, 1, 2 \ldots$ であったとき

$$x = \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 \ddots}}}$$

と表示されるように T で $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ の元を表示する方法である。

$x \in \operatorname{int} I_i$ であるとき $Tx = g(i)^{-1} x$ $g(i)^{-1} \in \Gamma$ となるよう $\{g(1), g(2), g(3)\ g(4)\}$ を定める Γ の元として $g(2)$ と $g(3)$ は等しいがここでは区別されている。

さて $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ が T-展開 $(e_0 e_1 e_2, \ldots)$ をもつということを

$$x \in (e_0^{-1})$$
$$Tx \in (e_1^{-1})$$
$$\cdots\cdots$$
$$T^n x \in (e_n^{-1})$$
$$\cdots\cdots$$

が成立することで定義する。但し $\mathrm{int}\, I_i$ を $(g(i)^{-1})$ と書いている。記号としては $x=(e_0e_1e_2\cdots)$ などと書くことにする。実は次が成立する

<u>命題</u> (1) $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ に対しT-展開は一意的である。

(2) $x,y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ かつ $x=(e_0e_1e_2\cdots)$ $y=(f_0f_1\cdots)$ $gx=y$ であるならば

$$g\,e_0e_1\cdots e_s=f_0f_1\cdots f_t \text{ in } \Gamma \text{ かつ}$$
$$e_{s+j}=f_{t+j} \quad j=0,1\ldots \text{ in } \Gamma$$

となる s,t が存在する。

類似の命題が非常に minor な修正によって Bowen-Series で構成された Markov 写像についても成立することが示される。

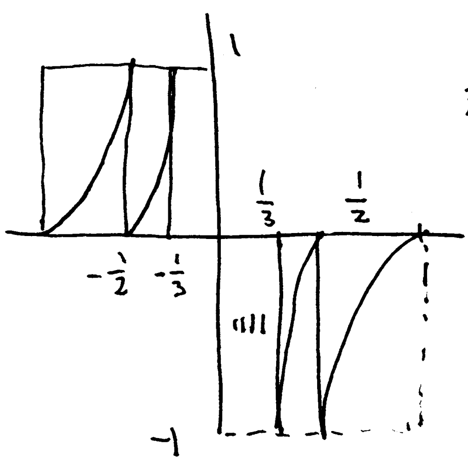
しかし、T と T_G ではあまりにも性質がことなっていることは良く分るであろう。そこで、次の段階が必要になる。これは一般の場合にはもし Γ が cocompact であれば不要となることを注意しておく。

<u>第三段階</u> (renormalization or construction of the first return map)

T の [-1,1] への first return map をつくってみるとそれは [-1,1] 全体で定義することはできないが有理点をのぞけば定義できて

$$U x = \begin{cases} U_n x = -\frac{1}{x} + n & \text{if } x \in J_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \\ \\ U_{-n} x = -\frac{1}{x} - n & \text{if } x \in J_{-n} = \left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right) \end{cases}$$

で与えられることは容易に分る. グラフは下図のようになる.



U はエルゴード理論における数論的変換における Renyi による結果であらわれる変換の性質をすべて満足しているのである. すなわち.

(U, Tra) (transitive) $\bigcup_{n=0}^{\infty} U^n \operatorname{int} J_k \supset \operatorname{int} J_\ell \quad \forall k, \ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

(U, Mar) (Markovian) $U \operatorname{int} J_k \cap \operatorname{int} J_\ell \neq \phi$

$\Longrightarrow U \operatorname{int} J_k \supset \operatorname{int} J_\ell$

(U, F) (finiteness) $\{ U \operatorname{int} J_k ; k = \pm 1, \pm 2 \cdots \}$

は有限種類 (この場合 (-1 0) と (0 1)) の区間のみからなる.

(U, E) (uniformly expanding) 正整数 N があって

$\operatorname{ess.inf} |(U^N)'| > 1$

(U, R) (Rényi condition) $\operatorname{ess\,sup} \dfrac{|U''|}{|U'|^2} < +\infty$

をみたす. 加えて (T, Γ) に対応して

(U, Γ) $\quad U|_{\mathrm{int}\,J_n} = g|_{\mathrm{int}\,J_n}$ for some $g \in \Gamma$

と

(U, Σ) $\quad \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}-\{0\}} |J_n|^\alpha < +\infty$ for $\mathrm{Re}\,\alpha > \frac{1}{2}$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}-\{0\}} |J_n|^{\frac{1}{2}} = \infty$$

をみたす. (U, Σ) が ζ が $\mathrm{Re}\,s > \frac{1}{2}$ で non zero meromorphic に接続されることをホショウしているのである.

この first return map をとる操作によって微係数 1 i.e. 放物元からくる T の固定点を除外することが出来る. 更に, T_G との関係も U からすぐに分る. $V = U^2|_{(0,1)}$ と T_G^2 は ⓠ の点 特に $\frac{1}{n+\frac{1}{m}}$ なる点 をのぞき 一致しているのである.

<u>第四段階</u> (CH(Γ) と $PO(T) - O_T(\infty)$, PO(U) の自然な対応の検証)

S : X → X を局所写像 (すなわち, すべての点で定義されているわけではないが X 全体を何らかの方法で

Sの定義域のごとく扱える)とするとき $S^n x = x$ となる $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ が存在する点を S の周期点といい $p: S^p x = x$ がこのような n で最小のとき p を周期ということにしよう. 一般に $O_S(x) = \{x, Sx, \ldots\}$ なのであるが x が周期点のときは $O_S(x) = \{x, Sx, \ldots, S^{p-1}x\}$ のように最小周期 p を用いてあらわすことにする. 更に単に S の周期軌道 τ というときは τ は周期点からなり $\tau \ni x$ を任意にとれば $\tau = \{x, Sx, \ldots, S^{p-1}x\} = O_S(x)$ とかけているものとする. $PO(S)$ で S の周期軌道の全体をあらわすこととする.

この第四段階では以下を示す.

<u>補題</u> $PO(T) - O_T(\infty)$, $PO(U)$, $CH(\Gamma)$ の間には自然な1:1対応がある. ここで自然なという意味は $\tau \in PO(T) - O_T(\infty)$ (resp. $\tau \in PO(U)$) と $c \in CH(\Gamma)$ が対応するとき

$$\tau = \{x, Tx, \ldots T^{p-1}x\} \quad (\text{resp. } \tau = \{x, Ux, \ldots U^{\delta-1}x\})$$

とあらわされているならば

$$\exp(\ell(c)) = (T^p)'(x)$$

が成立するということである. $\left(\text{resp } (U^\delta)'(x)\right)$

この補題の証明において第二段階のT-展開が重要な役割をはたすことを注意しておく.

$\tau=\{x, Tx, \ldots T^{p-1}x\}$ に対しどのように $CH(\Gamma)$ の元を対応するかを述べるのは易しいので少しふれておくと, $T^p x=x$ から $gx=x$ となる $g\in\Gamma$ で

$T^p|_{\text{nbd. of } x}=g|_{\text{nbd. of } x}$ なるものがある.

第三段階の (III, III) 条件より $g'x>1$ となり g は双曲元であることが分る (実は原始的でもある)

そこで τ に対して g の共役類を対応させるとうまくいく訳である.

この補題によって形式的には Z, ζ の T と U を用いた表示が得られる. 例えば形式的に計算してみると

$$\log\zeta(s)=\sum_{c}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\exp(-sk\,l(c))$$

$$=\sum_{\tau\in PO(U)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(U^{p(\tau)}\right)'(x_\tau)^{-sk}$$

$$=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{\substack{\tau\in PO(U)\\ p(\tau)=p}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(U^p)'(x_\tau)^{-sk}$$

$$=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{\substack{\tau\in PO(U)\\ p(\tau)=p}}\frac{1}{p}\sum_{x\in\tau}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(U^p)'(x)^{-sk}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{U^n x = x} (U^n)'(x)^{-s}$$

$$\therefore\ \zeta(s) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{U^n x = x} (U^n)'(x)^{-s} \right)$$

となる.

一般の Γ については補題は完全な1対1の形で示されるのではなく有限個の例外的な $c \in CH(\Gamma)$ が出てくる.

第五段階（転送作用素の導入とその適当な関数空間での実現）

上の ζ の U を用いた式を見ると $\sum_{U^n x = x} (U^n)'(x)^{-s}$ の $n \to \infty$ の挙動が少くとも ζ の解析性を見るためにわからねばならないはずである. そこで,

$$\text{“}\ L(s) f(x) = \sum_{Uy = x} U'(y)^{-s} g(y)\ \text{”}$$

といった形の作用素の trace をうまい具合に解析できないか, といった類の問題に行きつくわけである. ここでは2節の定理の主張 (4) を示すのに好都合な関数空間上の作用素として $L(s)$ を実現することを考える. 主張 (1)(2)(3) については別の空間を用いた方が良いのかも知れない.（実際, 別の空間を用いた証明の方が

先にやられた).

第三段階で得られたMarkov写像Uに対して$\mathbb{C}$内の領域 D_+, D_-, B_+, B_- を以下をみたすようにとれることはUの具体的な形から明らかである.

$$\begin{cases} [0,1] \subset B_+ \Subset D_+ \\ [-1,0] \subset B_- \Subset D_+ \\ U_n^{-1} D_- \subset B_+ \\ U_n^{-1} D_+ \subset B_- \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

領域 $B \subset \mathbb{C}$ に対して $\mathcal{A}(B)$ で B 上の有界正則関数の全体にsupノルムを入れたBanach空間をあらわすこととして.

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}(D_-) \oplus \mathcal{A}(D_+)$$

とおく. これが我々の転送作用素のdomainとなる空間である.

$$f = f_+ \oplus f_- \in \mathcal{A}$$

に対してとりあえず形式的に $s \in \mathbb{C}$ として

$$(L(s)f)_+(z) = \sum_{n=1}^{\infty} U'(U_{-n}^{-1}z)^{-s} f_-(U_{-n}^{-1}z)$$

$$(L(s)f)_-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} U'(U_n^{-1}z) f_+(U_n^{-1}z)$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

とおく.

第三段階でかかげた条件 (U, Σ) から $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$ であれば先の式は直ちに $\mathcal{A}$ 上の有界線形作用素を定めることが分るが、実は次が示せる.

<u>命題</u>　$L(s) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ は order 0 の核型作用素に値をとる $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続される. ここでいう order 0 の核型作用素は

A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espace nucleaires, Memoir. AMS 16 1955.

にあるわれるものである.

この証明は $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$ においては ($\mathrm{Re}\, s > \frac{3}{4}$ というのが実は正確なのだが直観的には $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$) では明らかである. $\mathrm{Re}\, s$ がどんどん小さくなるときはどうするかというと f_+, f_- を原点のまわりで Taylor 展開して見ると

$f_+(U_n^{-1} z) = f_+\left(\frac{1}{n-z}\right)$ という形をしているから

D_+ や B_+ のとり方によって n が十分大きくないといけないこともあるが、とにかく $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_+^{(k)}(0)}{k!} (n-z)^{-k}$. したがって $(n-z)^{-k}$ の項を $U'(U_n^{-1} z)^{-s} = (n-z)^{-2s}$ に乗ずれば weight の発散をコントロールできるという訳である.

この $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ の場合はたまたま $U'(U_n^{-1} z)$ に

ある部分と f_t を展開したとき出てくる項たちの形が同じであるわけで、結局 Hurwitz zeta 関数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^{2s}}$ の解析接続の知識，及びその結果で命題が示せてしまうのである．D. Mayer は連分数変換に対してこういったように従来の公式集からいろいろ Hurwitz zeta の性質を引用して彼の結果を出して来ている．しかし，Γ が一般となると解析接続の議論を一般的に実行せねばならない．我々がうまくいった理由はこの部分が案外素朴に達成できたことによるのである．

先に引用した A. Grothendieck の Memoir, A.M.S. 16 と A. Grothendieck, La Théorie de Fredholm Bull. Soc. math. France 84 (1956) 319-384 をあわせると $L(s)$ の Fredholm 行列式について

<u>命題</u>　$\det(I - L(s))$ は $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続される．特に $\mathrm{Re}\, s > 1$ においては analytic である．

第六段階 （$\mathrm{Re}\, s>1$ で $Z(s)=\det(I-L(s))$）

これを見れば目標達成である．それは

$$\det(I-L(s)) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\,L(s)^n\right)$$

という式を用いるのである．つまり $\mathrm{Tr}\,L(s)^n$ を計算せねばならない．$L(s)^n$ は $\displaystyle\sum_{U^n y=z}((U^n)'(y))^{-s}g(y)$ を $\mathcal{A}$ 上に実現したものと一致していることが容易に分るから U^n が homeo となる $[0\ 1]$ または $[-1\ 0]$ の小区間 J で $g \mapsto g(U_J^{-n})((U^n)'(U_J^{-n}))^{-s}$ の Trace をとって それを J について加えればよいのである．

ちなみに

補題 $U^n|_J : J \longrightarrow U^n J$ について

$U^n J \supset J$ であったならば

$\mathcal{A} \ni g \mapsto g(U_J^{-n})((U^n)'(U_J^{-n}))^{-s} \in \mathcal{A}$

の固有値はすべて simple であり それは

$$\{\ ((U^n)'(a))^{-s-k}\ ;\ k=0, 1, 2, \ldots\ \}$$

である．但し．a は J 内の唯一の U^n の固定点である．

この補題から ζ を $(U^n)'$ をつかってあらわした如く $Z(s)$ を $\det(I-L(s))$ であらわせるのである．